Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen

8 februari 2008, 9.00-12.00 uur.

Voor de opgave 1 t/m 3 zijn maximaal 2 punten per opgave te behalen; voor 4-5 max. 1.5 punt/opgave. Totaal: 9 + 1 (gratis) punten. Dit is een gesloten boek tentamen. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes!

1. Beschouw de quasi-lineaire, eerste-orde p.d.v.
$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \tag{1}$$
   (a) Neem $a(x,y,u) = x$, $b(x,y,u) = x+y$, $c(x,y,u) = u+1$ en bepaal de oplossing $u(x,y)$ van (1) die voldoet aan de beginvoorwaarde $u(x,0) = x^2$.

   (b) Schets het bewijs van de bij onderdeel (a) gevolgde oplosmethode.

2. Bereken de oplossing $u(x,t)$ van
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x \in (-1,1) \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 1 \qquad x \in (-1,1)$$
$$u(-1,t) = u(1,t) = 0 \qquad t > 0$$

3. Voor $T > 0$ beschouwen we $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$. Neem aan dat $u(x,t)$ voor $(x,t) \in Q_T$ voldoet aan de ongelijkheid
$$u_t - a(x,t)u_{xx} - b(x,t)u_x < 0$$
   waarbij $a(x,t) \geq 0$ in Q_T. Toon aan dat $u(x,t)$ geen lokaal maximum kan aannemen in Q_T.

4. Bepaal de Greensche functie van het probleem
$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = 0 \qquad x \in (\alpha,\beta)$$
   met $u(\alpha) = u_\alpha$ en $u(\beta) = u_\beta$.

5. Zij $\mathbf{u} = (u_1, u_2, .., u_n)$ en $\mathbf{A}$ een $n \times n$ matrix met constante elementen en n lineair onafhankelijke eigenvectoren. Beschouw het probleem
$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = 0 \qquad x > 0, \quad t > 0$$
   met $\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{0}$ voor $x \geq 0$. Aan welke condities op $x = 0$, $t > 0$ moet $\mathbf{u}$ voldoen opdat de oplossing $\mathbf{u}(x,t)$ kan worden bepaald voor alle x en t?